# Γραμμικη Αλγεβρα II

## Προχειρη Δοκιμασια **1**

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης- Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

**21 - 3 - 2012**

**Άσκηση 1.** *Θεωρούμε τους ακόλουθους υποχώρους του* $\mathbb{R}^4$*:*

$$\mathcal{V} = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\big\}$$

$$\mathcal{W} = \big\{(x, x, x, x) \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{R}\big\}$$

(1) *Να εξετασθεί αν ισχύει ότι* $\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

(2) *Αν* $\mathbb{R}^4 \neq \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, *να βρεθούν υπόχωροι* $\mathcal{U}$ *και* $\mathcal{Z}$ *του* $\mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε:*

$$\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$$

# Γραμμικη Αλγεβρα II

## Προχειρη Δοκιμασια 1

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης- Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

**21 - 3 - 2012**

**Άσκηση 1.** *Θεωρούμε τους ακόλουθους υποχώρους του* $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{V} = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\big\}$$

$$\mathcal{W} = \big\{(x, x, x, x) \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{R}\big\}$$

(1) *Να εξετασθεί αν ισχύει ότι* $\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

(2) *Αν* $\mathbb{R}^4 \neq \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, *να βρεθούν υπόχωροι* $\mathcal{U}$ *και* $\mathcal{Z}$ *του* $\mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε:*

$$\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$$

**Λύση.** *Έχουμε:*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\} \\ &= \{(x_1, 2x_3 - x_4, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1,0,0,0) + x_3(0,2,1,0) + x_4(0,-1,0,1) \mid x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,0,0,0), (0,2,1,0), (0,-1,0,1) \rangle \end{aligned}$$

*και*

$$\mathcal{W} = \{x(1,1,1,1) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,1,1) \rangle$$

*Το σύνολο διανυσμάτων* $\{(1,0,0,0), (0,2,1,0), (0,-1,0,1)\}$ *αποτελεί βάση του* $\mathcal{V}$ *αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 3$. *Επίσης* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W} = 1$. *Το άθροισμα* $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ *δεν είναι ευθύ αφού*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

*δηλαδή τα διανύσματα* $\{(1,0,0,0), (0,2,1,0), (0,-1,0,1), (1,1,1,1)\}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα, και άρα* $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) \neq \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W} = 4$. *Διαφορετικά, εύκολα παρατηρούμε ότι* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{W} \neq \{\vec{0}\}$. *Επομένως* $\mathbb{R}^4 \neq \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

*Στη συνέχεια θέλουμε να βρούμε υπόχωρους* $\mathcal{U}$ *και* $\mathcal{Z}$ *του* $\mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε:* $\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$. *Αφού ο υπόχωρος* $\mathcal{V}$ *αποτελείται από τρια διανύσματα πρέπει απλά να επιλέξουμε κατάλληλα ακόμα ένα διάνυσμα* $\vec{\varepsilon} \in \mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε το σύνολο διανυσμάτων*

$$\{(1,0,0,0), (0,2,1,0), (0,-1,0,1), \vec{\varepsilon}\}$$

*να είναι βάση του* $\mathbb{R}^4$. *Έστω* $\mathcal{U} = \langle (0,0,0,1) \rangle$. *Τότε το σύνολο*

$$\{(1,0,0,0), (0,2,1,0), (0,-1,0,1), \vec{\varepsilon} = (0,0,0,1)\}$$

*είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα* $\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$. *Έστω ο υπόχωρος του* $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{Z} = \langle (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$$

*Τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο* $\{(1,1,1,1), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα έχουμε ότι* $\mathbb{R}^4 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$. $\square$